Tema 62. Puertas lógicas. Técnicas de diseño y Simplificación de funciones lógicas

Índice

1. Introducción.

Las técnicas digitales y los circuitos lógicos son, cronológicamente, anteriores a la aparición y posterior desarrollo de la Electrónica Digital, su origen se remonta a los tiempos en que surgió la necesidad de construir automatismos, así los primero circuitos lógicos se construyeron con relés electromagnéticos, siendo una de las primeras aplicaciones las redes telefónicas.

La aparición de las válvulas primero y de los semiconductores después, supuso un avance considerable tanto en la reducción de los circuitos, como en la reducción del consumo pero fue, con la aparición de los Circuitos Integrados, cuando se logró el máximo evolutivo.

El estudio de la Electrónica Digital se hace desde el conocimiento de la función que realiza el dispositivo, así como sus características eléctricas externas, sin que sea necesario el conocimiento de los componentes que lo constituyen ni el funcionamiento de sus componentes básicos. Sin embargo si se hace imprescindible el conocimiento de la base lógica-matemática, así como de las funciones elementales que desarrollaremos seguidamente.

2. Álgebra de Boole.

A principios del siglo XIX fue desarrollada el Algebra Lógica, por George Boole, para investigar las leyes fundamentales de aquellas operaciones por las que se rige el razonamiento humano, por lo que también se conoce como Álgebra de Boole.

El Álgebra de Boole opera con relaciones lógicas donde las variables, denominadas binarias, pueden tomar solamente dos valores distintos: verdadero o falso.

Estos dos valores se representan simbólicamente con los signos 1 y O respectivamente y expresan por tanto estados no cantidades.

Se define como función Lógica o Booleana a toda variable binaria cuyo valor depende de una expresión algebraica formada por otras variables binarias relacionadas mediante los operadores del algebra de Boole.

Así pues, el algebra de Boole se define en el conjunto:

$$B = \{0, 1\}$$

2.1. Tabla de la verdad.

La Tabla de la Verdad de una función es un cuadro formado por tantas columnas como variables contenga la función más la correspondiente a ésta y por tantas filas como combinaciones binarias sea posible construir con dichas variables.

Las combinaciones posibles serán 2n, siendo n el número de variables y debiéndose ordenar las combinaciones binarias de forma creciente con el fin de evitar repeticiones.

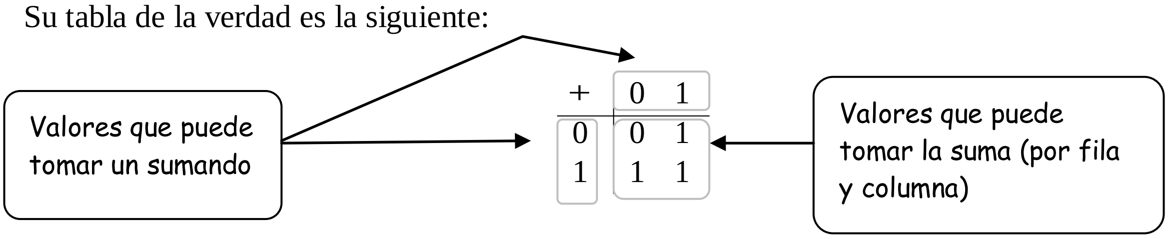
Entre la Tabla de la verdad y la función que representa existe una relación univoca.

2.2. Operadores del Álgebra de Boole.

Los operadores básicos o elementales son:

- Operador suma: Conocido también como Unión o función OR, opera sobre dos elementos

Su tabla de la verdad es la siguiente:



- Operador producto: Conocido también como función intersección o función AND, opera sobre dos elementos su tabla de la verdad es la siguiente:

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

- Operador complemento: Conocido también como negación o función NOT, opera sobre un elemento su tabla de la verdad es la siguiente:

a	$\overline{a}$
0	1
1	0

2.3. Postulados del Álgebra de Boole.

Existe un complemento	$a + \overline{a} = 1$	$a + \overline{a} = 1$
Idempotencia	$a + a = a$	$a \cdot a = a$
Existe un elemento neutro	$a + 0 = a$	$a \cdot 0 = 0$
Dominio del 0 y del 1	$a + 1 = 1$	$a \cdot 1 = a$
Doble complementación	$\overline{\overline{a}} = a$	

2.4. Propiedades del Álgebra de Boole.

Conmutativa	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$
Distributiva	$a + b \cdot c = (a + b) \cdot (a + c)$	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
Asociativa	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot b \cdot c$	$a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c$

2.5. Teoremas del Álgebra de Boole.

Absorción $\quad a + (a \cdot b) = a \qquad a \cdot (a + b) = a$

Leyes de De Morgan

$$\overline{a \cdot b \cdot c \cdot d} = \overline{a} + \overline{b} + \overline{c} + \overline{d}$$

$$\overline{a + b + c + d} = \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} \cdot \overline{d}$$

2.6. Forma canónica.

Se llama forma canoníca de una función Booleana a todo producto de sumas o suma de productos en las cuales aparecen todas las variables, en forma directa o complementada, en cada uno de los términos que conforma la expresión.

La función suma de productos recibe el nombre de primera forma canónica o MINTERMS y la función producto de sumas segunda forma canónica o MAXTERMS.

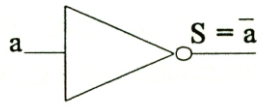
3. Puertas lógicas.

Una Puerta Lógica es un dispositivo electrónico integrado capaz de realizar una función básica, y que representaremos mediante un símbolo, sin importarnos los elementos que lo conforman ni la forma en que estos están dispuestos.

- Puerta NOT

  Esta Puerta realiza la función básica de negación n. En ella la salida es 1 si y sólo si la variable de entrada toma el valor 0.

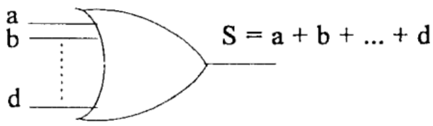
  La Puerta NOT realiza por tanto la función de complementación, siendo su función y representación simbólica las siguientes:



a	s
0	1
1	0

- Puerta OR

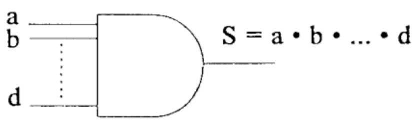
  Esta Puerta realiza la función básica de unión. En ella la salida es 1 si, y solo si al menos una de las variables de entrada toman el valor 1. La Puerta OR realiza por tanto la función suma Lógica de las variables, siendo su función y representación simbólica las siguientes:



a	b	s
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

- Puerta AND

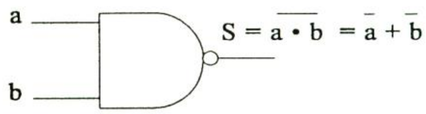
  Esta Puerta realiza la función básica de Intersección. En ella la salida es 1 si, y solo si, todas y cada una de las variables de entrada toman el valor 1. La Puerta AND realiza por tanto la función producto lógico de las variables, siendo su función y representación simbólica las siguientes:



a	b	s
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

- Puerta NAND

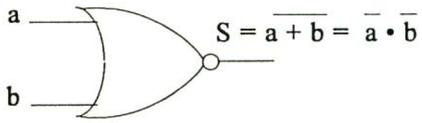
  La puerta NAND se obtiene de la combinación de la puerta AND y la negación de su salida, su símbolo y tabla de la verdad son los siguientes:



a	b	s
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

- Puerta NOR

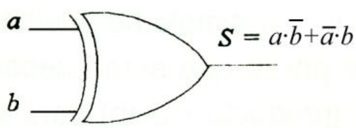
  La puerta NOR se obtiene de la combinación de la puerta OR y la negación de su salida, su símbolo y tabla de la verdad son los siguientes:



a	b	s
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

- Puerta XOR

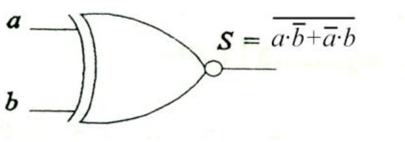
  La función OR-Exclusiva de dos variables a y b es aquella que toma el valor 1 cuando una de las variables toma el valor 1 y la otra el valor 0 o viceversa. Su función y representación simbólica se muestran a continuación:



a	b	s
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

- Puerta XNOR

  La función NOR-Exclusiva se obtiene de la combinación de la función XOR con la función NOT. Su función y representación simbólica se muestran a continuación:



a	b	s
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

4. Técnicas de diseño y Simplificación de funciones lógicas.

Una misma función lógica puede expresarse o realizarse con distintas combinaciones de puertas lógicas. Al plantearse la realización física de una función, el proyectista buscará minimizar el coste y estandarizar el uso de las puertas lógicas, es decir procurara usar un mismo tipo de puertas lógicas para implementar la función lógica.

4.1. Obtención de las formas canónicas de una función a partir de la tabla de la verdad.

De la Tabla de la verdad de una función Lógica es fácil deducir las formas canónicas de una función.

Los productos de la primera forma canónica se formarán para cada fila en que la función toma el valor 1, asignando al 0 la variable complementada y al 1 la variable directa y sumándolos todos ellos.

Así de la siguiente tabla

a	b	c	s
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Obtendríamos:

$$s = \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot c + \overline{a} \cdot b \cdot \overline{c} + a \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} + a \cdot \overline{b} \cdot c + a \cdot b \cdot \overline{c}$$

Las sumas de la segunda forma canónica se formaran para cada fila en que la función toma

El valor 0, asignando 0 a la variable directa y 1 a la variable complementada y multiplicándolas todas ellas a continuación.

Así pues de la tabla anterior obtendríamos:

$$s = (a + b + c) \cdot (a + \overline{b} + \overline{c}) \cdot (\overline{a} + \overline{b} + \overline{c})$$

4.2. Simplificación de funciones lógicas.

Una vez obtenida la función canónica de un determinado proceso, es posible encontrar una función Lógica equivalente a la anterior, que tenga el mínimo número de términos sin que por ello varíe la función. Para conseguirlo se disponen de varios Métodos:

4.2.1. Simplificación mediante operaciones matemáticas.

Consiste en realizar operaciones con los términos de la función canónica intentando simplificarla lo más posible. El resultado dependerá de la habilidad del diseñador.

4.2.2. Método gráfico de Karnaugh.

En este Método para realizar las simplificaciones nos basamos en una ordenación de la tabla de la verdad, de donde podemos deducir si la variación de una variable afecta al resultado de un término. Pasos a seguir:

1. Construcción de las graficas:

   Se disponen las combinaciones de las variables de manera que en dos casillas consecutivas solo varíe una de ellas.

a / b	0	1
0		
1		

Cuadro 1: Tabla para 2 variables.

a,b / c	00	01	11	10
0				
1				

Cuadro 2: Tabla para 3 variables.

a,b / c,d	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

Cuadro 3: Tabla para 4 variables.

2. Completamos la tabla según el resultado que da la función Lógica en cada casilla.

   Ej. $f=\overline{a}\cdot b\cdot\overline{c}\cdot\overline{d}++\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}\cdot d+\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot c\cdot d+\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot c\cdot\overline{d}+\overline{a}\cdot b\cdot c\cdot d+a\cdot b\cdot c\cdot d+a\cdot\overline{b}\cdot c\cdot d+a\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}\cdot d$

3. Ahora se realizan agrupamientos de miembros contiguos, lo más grande posibles pero siempre con numero par de miembros. Hay que tener en cuenta que podemos pasar de un límite a otro ya que ahí también cambia so lo una variable.

4. Los valores que no se puedan agrupar se dejan solos.

$\frac{a,b}{c,d}$	00	01	11	10
00	0	1	0	0
01	1	0	0	1
11	1	1	1	1
10	1	0	0	0

$\frac{a,b}{c,d}$	00	01	11	10
00	0	$\boxed{1}$	0	0
01	1	0	0	1
11	1	1	1	1
10	1	0	0	0

5. los miembros rodeados serán los MINTERMS de la función, dentro de un mismo agrupamiento se elimina el miembro que tiene dos valores digitales, ya que este no afecta al valor de la función.

   Así pues la función del ejemplo queda formada por cuatro sumandos, que son los que se encuentran rodeados en la tabla.

$$f = \bar{a}\cdot b\cdot \bar{c}\cdot \bar{d} + c\cdot d + \bar{a}\cdot \bar{b}\cdot c + \bar{b}\cdot d$$

4.2.3. Método numérico de Quine-McCluskey.

Es un Método para funciones de cinco o más variables, dada su laboriosidad es susceptible de tratamiento mediante un programa informático.

4.3. Implementación de funciones mediante puertas lógicas.

La Implementación de cualquier función lógica, entendida como la realización física de dicha función, es francamente simple, si bien, será necesario primero simplificarla función.

La utilización de distintos tipos de puertas conlleva la utilización de un elevado número de circuitos integrados, ya que en cada C.I. todas las puertas son del mismo tipo, por ello es importante disponer de un tipo de puerta capaz y suficiente para poder implementar cualquier función. Pues bien, todas las funciones se pueden construir utilizando exclusivamente puertas NAND o puertas NOR.

4.3.1. Lógica NAND-NAND.

El proceso que se debe seguir para transformar cualquier tipo de función en una expresión algebraica tal que se puede implementar por puertas NAND es el siguiente:

1. En primer lugar aplicar toda la expresión una doble inversión.

2. Si la función es un producto, las dos negaciones deben dejarse tal cual. Si es una suma, se elimina una de ellas mediante la aplicación de las leyes de De Morgan.

3. Se continúa invirtiendo doblemente los términos o partes de la función hasta que todas las sumas y productos se conviertan en productos o productos negados.

$$S = \overline{a \cdot a} = \overline{a}$$

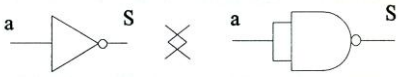


Figura 1: Puerta NOT con Lógica NAND.

$$S = a \cdot b \quad ; \quad \overline{\overline{S}} = \overline{\overline{a \cdot b}} \quad ; \quad S = \overline{\overline{a \cdot b}}$$

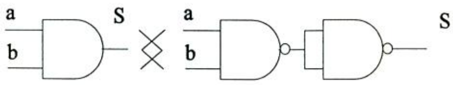


Figura 2: Puerta AND con Lógica NAND.

$$S = a + b \quad ; \quad \overline{\overline{S}} = \overline{\overline{a + b}} \quad ; \quad S = \overline{\overline{a + b}} = \overline{\overline{a} \cdot \overline{b}}$$

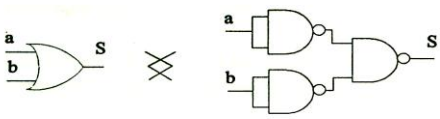


Figura 3: Puerta OR con Lógica NAND.

$$S = a \quad b = a \cdot \overline{b} + \overline{a} \cdot b$$

$$\overline{\overline{S}} = \overline{\overline{a \cdot \overline{b} + \overline{a} \cdot b}} \quad ; \quad S = \overline{\overline{a \cdot \overline{b}} \cdot \overline{\overline{a} \cdot b}}$$

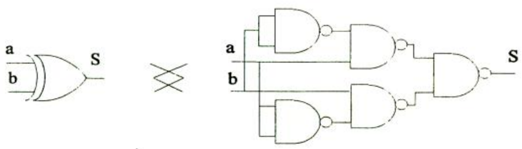


Figura 4: Puerta XOR con Lógica NAND.

$$S = \overline{a \quad b} = \overline{a \cdot \overline{b} + \overline{a} \cdot b}$$

$$S = \overline{a \cdot \overline{b} + \overline{a} \cdot b} \quad ; \quad S = \overline{\overline{a \cdot \overline{b}} \cdot \overline{\overline{a} \cdot b}}$$

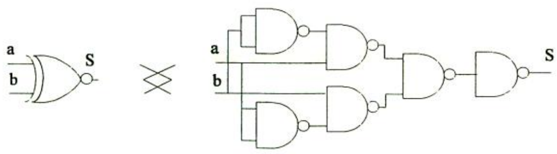


Figura 5: Puerta XNOR con Lógica NAND.

4.3.2. Lógica NOR-NOR

El proceso que se debe seguir para transformar cualquier tipo de función en una expresión algebraica tal que se pueda implementar con puertas NOR solamente, es semejante al visto para las puertas NAND, y es como sigue:

1. En primer lugar debe aplicarse a la expresión en su conjunto una doble inversión.

2. Si la función es una suma, las dos negaciones deben dejarse tal cual. Si es un producto, se elimina una de ellas mediante la aplicación de las leyes de De Morgan.

3. Se continúa invirtiendo doblemente los términos o partes de la función hasta que todas las sumas y productos se conviertan en sumas o sumas negadas.

$$S = \overline{a + a} = \overline{a}$$

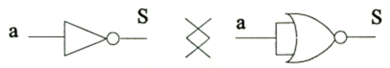


Figura 6: Puerta NOT con Lógica NOR.

$$S = a \cdot b \quad ; \quad \overline{\overline{S}} = \overline{\overline{a \cdot b}} \quad ; \quad S = \overline{\overline{a} + \overline{b}}$$

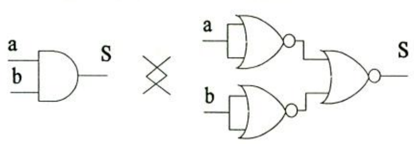


Figura 7: Puerta AND con Lógica NOR.

$$S = a + b \quad ; \quad \overline{\overline{S}} = \overline{\overline{a + b}} \quad ; \quad S = \overline{\overline{a + b}}$$

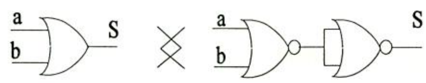


Figura 8: Puerta OR con Lógica NOR.

$$S = a \quad b = a \cdot \overline{b} + \overline{a} \cdot b$$

$$\overline{\overline{S}} = \overline{\overline{a \cdot \overline{b} + \overline{a} \cdot b}} \quad ; \quad S = \overline{a + \overline{b}} + \overline{\overline{a} + b}$$

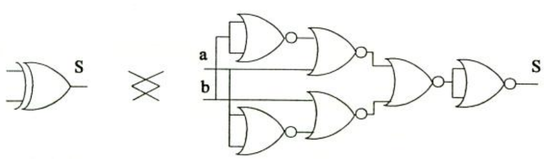


Figura 9: Puerta XOR con Lógica NOR.

$$S = \overline{a \quad b} = \overline{a \cdot \overline{b} + \overline{a} \cdot b}$$

$$S = \overline{a \cdot \overline{b} + \overline{a} \cdot b} \quad ; \quad S = \overline{\overline{a + \overline{b} + \overline{a} + b}}$$

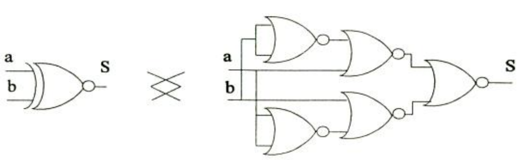


Figura 10: Puerta XNOR con Lógica NOR.